

Publicado em: LYCURGO, Tassos. "O Teorema da Dedução". In: *Anais do IV encontro Nacional de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática*. Rio Claro (SP): Unesp, 2000, p. 192-196.

O TEOREMA DA DEDUÇÃO

Tassos Lycurgo
UFRN

No seu artigo titulado *Research Studies in How Human Think About Algebra*, Robert Davis considera uma das questões mais essenciais do estudo em ensino e aprendizado de matemática, qual seja a de se levar em consideração o que acontece na mente das pessoas quando elas pensam em tal disciplina. No caso específico da lógica formal, que é um ramo da matemática, a mesma pergunta se faz pertinente e, mais que isso, faz-se indispensável para todo o questionamento no caso em que se assume que o homem pensa logicamente as questões formais.

A natureza do seu pensamento lógico, apesar do aparecimento das lógicas heterodoxas, parece não poder fugir do escopo da ortodoxia lógica. A razão para tal, nada obstante, não concerne às naturezas das questões em si, mas, ao que parece, diz respeito à estrutura humana. Em outras palavras, não é a lógica que somente pode ser elaborada de uma forma tal, mas sim é a estrutura do homem que apenas o permite a pensar e a comunicar quaisquer lógicas sob os pontos de vista da lógica clássica, com a qual ele formula o seu discurso e, quiçá, o seu pensamento.

Sendo assim, pressupõe-se que o homem pensa logicamente e, mais que isso, que tal lógica é clássica e formal. Mas, vale ainda perguntar qual o princípio fundamental que rege o pensamento do homem na lógica. Em uma tentativa de resposta a tal inquirição, poder-se-ia enveredar por aspectos mais gerais do raciocínio, como faz Davis ao considerar as representações mentais e as assimilações de paradigmas. Aqui, contudo, tentar-se-á tomar como modesto compromisso a apresentação do teorema da dedução, que, como se sabe, é responsável por grande parte do raciocínio formal humano e, em uma postura mais radical, pela totalidade do pensamento válido.

Eis, portanto, o teorema da dedução:

Formulação:

Se Γ é um conjunto de fórmulas bem formadas (fbf),

α e β são fbf, e

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$,

então

$\Gamma \vdash \beta$.

Em particular, se $\alpha \vdash \beta$, então $\alpha \vdash \beta$.

(ver Mendelson, pp. 32-3)

Prova:

Provar-se-á que $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$ para todo i inteiro positivo, tal que $1 \leq i \leq n$, tomando-se como base a suposição de que β_1, \dots, β_n prova β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, onde $\beta_n = \beta$. A metodologia para tal será a o uso da indução matemática em i , onde $i \in \mathbb{Z}_+^*$ (inteiros positivos) e se corresponde biunivocamente com o conjunto das linhas do comprimento de prova de β .

Ou seja, a partir de uma prova de β do tipo:

- 1) Γ
- 2) α
- 3) β_1
- 4) ...
- 5) β_n

Provar-se-á que $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$, onde $1 \leq i \leq n$.

Metodologia:

Para tal prova, faz-se mister que primeiramente se provem os passos da indução matemática, a saber:

- I) a base da indução;
- II) a hipótese indutiva e
- III) o passo indutivo.

Ferramentas:

Em tais provas, contudo, utilizar-se-ão dois axiomas do sistema de Mendelson, largamente utilizados em outros sistemas axiomáticos, um lemma e uma proposição. Ei-los, respectivamente:

- T1) $A \supset (B \supset A)$
- T2) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$
- T3) $(A \supset A)$; ou seja, de qualquer fórmula A, pode-se obter outra, tal que $A \supset A$.
- T4) Em resumo, uma substituição em uma tautologia, mantém-na uma tautologia.

Utilizar-se-ão também as seguintes noções de consequência como propriedades simples:

- N1) $\Gamma \supset \beta$ se e somente se $\Gamma \vdash \beta$; e
- N2) β se e somente se $\Gamma \vdash \beta$.

Por fim, como regra de inferência, utilizar-se-á o *Modus Ponens* (MP), segundo o qual, $(A \supset B), A$
B

Demonstração:

Assim sendo, note-se que $\Gamma, \alpha \vdash \beta_i$, se e somente se:

- a) β_i é uma fbf de Γ ;
 - a.1) $i = 1$;
 - a.2) $1 < i \leq n$;
- b) β_i é um axioma de L;
 - b.1) $i = 1$;
 - b.2) $1 < i \leq n$;
- c) β_i é α .
 - c.1) $i = 1$;
 - c.2) $1 < i \leq n$;
- d) β_i é uma consequência por *modus ponens* (MP) de algum β_j e β_m , onde $j < i$, $m < i$, e β_m tem a forma $\beta_j \supset \beta_i$.

Note-se que o propósito das situações (a.1), (b.1) e (c.1) é provar (I), ou seja, a base da indução matemática. Por sua vez, (a.2), (b.2) e (c.2) provará (II), a hipótese indutiva. (I) e (II) serão aplicados em (III), o passo indutivo da indução matemática, que será provado por (d). Vale salientar que o princípio da indução matemática tomará a seguinte forma em (d): $\beta_1, \beta_j \supset \beta_i \vdash \beta_i$.

I) A base da indução:

- I.1) Dividir-se-á o caso (a), no qual β_i é uma fbf de Γ , em duas partes: a.1) situação na qual $i = 1$; e a.2) situação na qual $1 < i \leq n$.

Para a situação (a.1), tem-se que:

- 1) β_1 Premissa

2)	β_1	1 - (N1)
3)	$\Gamma \beta_1$	2 - (N2)
4)	$\beta_1 \supset (\alpha \supset \beta_1)$	(T1)
5)	$\beta_1 \supset (\alpha \supset \beta_1)$	4- (N1)
6)	$\Gamma \beta_1 \supset (\alpha \supset \beta_1)$	5 - (N2)
7)	$\Gamma (\alpha \supset \beta_1)$	1, 6 - MP

Desta maneira, por 1-7, Prova-se que a partir de $\Gamma, \alpha \beta$, obtém-se $\Gamma \alpha \supset \beta_1$.

A situação (a.2) será considerada em (II).

I.2) Dividir-se-á o caso (b), no qual β_1 é um axioma de L, em duas partes: b.1) situação na qual $i = 1$; e b.2) situação na qual $1 < i \leq n$.

Para a situação (b.1), tem-se que:

1)	β_1	Axioma
2)	β_1	1 - (N1)
3)	$\Gamma \beta_1$	2 - (N2)
4)	$\beta_1 \supset (\alpha \supset \beta_1)$	(T1)
5)	$\beta_1 \supset (\alpha \supset \beta_1)$	4- (N1)
6)	$\Gamma \beta_1 \supset (\alpha \supset \beta_1)$	5 - (N2)
7)	$\Gamma (\alpha \supset \beta_1)$	1, 6 - MP

Desta maneira, por 1-7, Prova-se que a partir de $\Gamma, \alpha \beta$, obtém-se $\Gamma \alpha \supset \beta_1$.

A situação (b.2) será considerada em (II).

I.3) Dividir-se-á o caso (c), no qual β_1 é α , em duas partes: c.1) situação em que $i = 1$ e c.2) situação em que $1 < i \leq n$.

Para a situação (c.1), em que β_1 é α , ou seja, em que $i = 1$, tem-se que:

1)	α	Premissa
2)	$\Gamma \alpha$	1 - (N1)
3)	$\Gamma (\alpha \supset \alpha)$	(T3)
4)	$\Gamma (\alpha \supset \beta_1)$	3 - (T4)

Desta maneira, por 1-4, Prova-se que a partir de $\Gamma, \alpha \beta$, obtém-se $\Gamma \alpha \supset \beta_1$.

A situação (c.2) será considerada em (II)

Veja-se que por (a.1), (b.1) e (c.1), prova-se (I), ou seja, a base da indução.

II) A hipótese indutiva:

Os casos (a.2), (b.2) e (c.2), são provados pelas provas (a.1), (b.1) e (c.1), respectivamente, apenas substituindo β_1 por β_i . De maneira que se prova que a partir de $\Gamma, \alpha \beta$, obtém-se $\Gamma \alpha \supset \beta_i$. Desta maneira prova-se (II), ou seja, a hipótese indutiva.

III) O passo indutivo:

III.1) Para a situação (d), na qual β_i , onde $1 < i < n$, é uma consequência por *modus ponens* (MP) de algum β_j e β_m , onde $j < i$, $m < i$, e β_m tem a forma $\beta_j \supset \beta_i$, assume-se que $\Gamma \alpha \supset \beta_k$ para qualquer $k < i$. Desta maneira, obtém-se por hipótese indutiva (H1) e (H2), onde (H1) é $\Gamma \alpha \supset \beta_j$ e (H2) é $\Gamma \alpha \supset (\beta_j \supset \beta_i)$. Assim sendo, tem-se que:

- | | | |
|----|---|----------|
| 1) | $\Gamma \quad \alpha \supset \beta_j$ | por (H1) |
| 2) | $\Gamma \quad \alpha \supset (\beta_j \supset \beta_i)$ | por (H2) |
| 3) | $((\alpha \supset (\beta_j \supset \beta_i)) \supset ((\alpha \supset \beta_j) \supset (\alpha \supset \beta_i)))$ | (T2) |
| 4) | $\Gamma \quad ((\alpha \supset (\beta_j \supset \beta_i)) \supset ((\alpha \supset \beta_j) \supset (\alpha \supset \beta_i)))$ | 3 - (N1) |
| 5) | $\Gamma \quad (\alpha \supset \beta_j) \supset (\alpha \supset \beta_i)$ | 2,4 - MP |
| 6) | $\Gamma \quad (\alpha \supset \beta_i)$ | 1,5 MP |

Desta maneira, por 1-6, Prova-se que a partir de $\Gamma, \alpha \quad \beta$, obtém-se $\Gamma \quad \alpha \supset \beta$.

III.2) Note que o caso em que $i = n$ é considerado em (III). Para tal, apenas considere que β_i , onde $i = n$, é uma consequência por *modus ponens* (MP) de algum β_j e β_m onde $j < n$, $m < n$, e β_m tem a forma $\beta_{(n-1)} \supset \beta_n$. Assuma que $\Gamma \quad \alpha \supset \beta_k$ para $k < n$. Desta maneira, obtém-se por hipótese indutiva (H1) e (H2), onde (H1) é $\Gamma \quad \alpha \supset \beta_{(n-1)}$ e (H2) é $\Gamma \quad \alpha \supset (\beta_{(n-1)} \supset \beta_n)$. Assim sendo, usando o esquema de prova em (III) obter-se-á na linha (6): $\Gamma \quad (\alpha \supset \beta_n)$.

Conclusão:

Conclui-se, portanto, que se é o caso que o homem pensa logicamente e que tal pensamento é sempre ortodoxo, uma das ferramentas mais usadas em seu ato de pensar é a dedução, que se considerou neste modesto trabalho.

Bibliografia:

- DAVIS, Robert B. Research Studies in How Humans Think about Algebra. In: S. Wagner and C. Kieran (eds). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Vol. 4. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1989, pp. 267-74, 289 p.
- HERBRAND, J. Recherches sur la théorie de la démonstration, *Travaux de la Soc. Des Sci. Et des Lettres de Varsovie*, III, vol. 33, pp. 33-160.
- MENDELSON, Elliott. *Introduction to Mathematical Logic*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1963.